# 1 Подготовительный этап

Уважаемый читатель! В отличие от более ранних работ, в этот раз автор стремится по возможности структурировать материал, правда, пока *весьма неформальным* образом.

## 1.1 Метрика (0.0) и "короткие"уравнения

Метрика ШП (0.0) задана в следующем виде

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -e^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^D \end{pmatrix} \tag{1}$$

где $A = A(x^1, x^2, x^3)$, $B = B(x^0, x^2, x^3)$, $C = C(x^0, x^1, x^3)$, $D = D(x^0, x^1, x^2)$. Система уравнений на тензор Вейля насчитывает 8 независимых уравнений, из которых два - слишком громоздкие и не приведены, оставшиеся шесть - следующие:

$$2D_{,12} - 2A_{,12} = A_{,2}(A_{,1} - C_{,1}) + B_{,2}(D_{,1} - A_{,1}) + D_{,2}(C_{,1} - D_{,1}) \tag{2}$$

$$2C_{,13} - 2A_{,13} = B_{,3}(C_{,1} - A_{,1}) + A_{,3}(A_{,1} - D_{,1}) + C_{,3}(D_{,1} - C_{,1}) \tag{3}$$

$$2B_{,02} - 2D_{,02} = B_{,2}(C_{,0} - B_{,0}) + A_{,2}(B_{,0} - D_{,0}) + D_{,2}(D_{,0} - C_{,0}) \tag{4}$$

$$2B_{,03} - 2C_{,03} = A_{,3}(B_{,0} - C_{,0}) + C_{,3}(C_{,0} - D_{,0}) + B_{,3}(D_{,0} - B_{,0}) \tag{5}$$

$$2A_{,23} - 2B_{,23} = C_{,3}(A_{,2} - B_{,2}) + B_{,3}(B_{,2} - D_{,2}) + A_{,3}(D_{,2} - A_{,2}) \tag{6}$$

$$2C_{,01} - 2D_{,01} = C_{,1}(B_{,0} - C_{,0}) + A_{,1}(C_{,0} - D_{,0}) + D_{,1}(D_{,0} - B_{,0}) \tag{7}$$

## 1.2 Исследование совместности уравнений (2)-(7)

Исследование совместности этих уравнений удобно провести по следующей схеме. Начнем, например, с уравнений, содержащих производные от функции $A$. Из (2), (3), (6) найдем вторые производные от функции $A$, продифференцируем их нужным образом и исключим третьи производные и, по возможности, вторые (все вторые производные исключить невозможно, это следует из уравнений (2-7)). Получим два уравнения

$$2B_{,23}(C_{,1} - D_{,1}) + D_{,12}(C_{,3} - B_{,3}) + C_{,13}(B_{,2} - D_{,2}) = 0 \tag{8}$$

$$B_{,23}(C_{,1} - D_{,1}) + D_{,12}(C_{,3} - B_{,3}) + 2C_{,13}(B_{,2} - D_{,2}) = 0 \tag{9}$$

Исключая, допустим, $B_{,23}$, получим уравнение

$$D_{,12}(B_{,3} - C_{,3}) + C_{,13}(B_{,2} - D_{,2}) = 0 \tag{10}$$

которое можно проинтегрировать по $x^1$

$$B_{,3}D_{,2} + B_{,2}C_{,3} - C_{,3}D_{,2} = F^1, \qquad F^1 = F^1(x^0, x^2, x^3) \tag{11}$$

Исключая $D_{,12}$, $C_{,13}$ и интегрируя, можно получить еще две формулы

$$B_{,3}C_{,1} + D_{,1}C_{,3} - B_{,3}D_{,1} = F^2 \tag{12}$$

$$B_{,2}D_{,1} + C_{,1}D_{,2} - B_{,2}C_{,1} = F^3 \tag{13}$$

Аналогично можно найти еще девять первых интегралов

$$A_{,2}C_{,1} + A_{,1}B_{,2} - C_{,1}B_{,2} = G^0 \tag{14}$$

$$A_{,2}B_{,0} + B_{,2}C_{,0} - A_{,2}C_{,0} = G^1 \quad (15)$$

$$A_{,1}C_{,0} + B_{,0}C_{,1} - A_{,1}B_{,0} = G^2 \quad (16)$$

$$A_{,3}D_{,1} + A_{,1}B_{,3} - B_{,3}D_{,1} = H^0 \quad (17)$$

$$A_{,3}B_{,0} + B_{,3}D_{,0} - A_{,3}D_{,0} = H^1 \quad (18)$$

$$A_{,1}D_{,0} + B_{,0}D_{,1} - A_{,1}B_{,0} = H^3 \quad (19)$$

$$A_{,3}D_{,2} + A_{,2}C_{,3} - C_{,3}D_{,2} = K^0 \quad (20)$$

$$A_{,3}C_{,0} + C_{,3}D_{,0} - A_{,3}D_{,0} = K^2 \quad (21)$$

$$A_{,2}D_{,0} + D_{,2}C_{,0} - A_{,2}C_{,0} = K^3 \quad (22)$$

Их можно записать и в другой форме, например, для (13) и (14) можно записать

$$(B_{,2} - D_{,2})(C_{,1} - D_{,1}) = \tilde{F}^3 \quad (23)$$

$$(A_{,1} - C_{,1})(B_{,2} - A_{,2}) = \tilde{G}^0 \quad (24)$$

Эта новая форма особенно удобна для того, чтобы подставить найденные соотношения в исходные уравнения (2-7). Так, подстановка (23), (24) в (2) приводит к равенству

$$A_{,12} - \tilde{G}^0 = D_{,12} - \tilde{F}^3 = h_{12}(x^1, x^2) \quad (25)$$

(множитель 2 здесь был опущен, поскольку $F, G$ - произвольные функции). В результате указанных действий система (2-7) превращается в систему 12 уравнений, содержащих 6 новых неизвестных функций от двух переменных (нижние индексы указывают, от каких переменных эти функции зависят)

$$A_{,23} = h_{23} - (A_{,2} - D_{,2})(A_{,3} - C_{,3})/2 \quad (26)$$

$$B_{,23} = h_{23} - (B_{,2} - D_{,2})(B_{,3} - C_{,3})/2 \quad (27)$$

$$A_{,13} = h_{13} - (A_{,1} - D_{,1})(A_{,3} - B_{,3})/2 \quad (28)$$

$$C_{,13} = h_{13} - (C_{,1} - D_{,1})(C_{,3} - B_{,3})/2 \quad (29)$$

$$A_{,12} = h_{12} - (A_{,1} - C_{,1})(A_{,2} - B_{,2})/2 \quad (30)$$

$$D_{,12} = h_{12} - (D_{,1} - C_{,1})(D_{,2} - B_{,2})/2 \quad (31)$$

$$B_{,02} = h_{02} - (B_{,0} - C_{,0})(B_{,2} - A_{,2})/2 \quad (32)$$

$$D_{,02} = h_{02} - (D_{,0} - C_{,0})(D_{,2} - A_{,2})/2 \quad (33)$$

$$B_{,03} = h_{03} - (B_{,0} - D_{,0})(B_{,3} - A_{,3})/2 \quad (34)$$

$$C_{,03} = h_{03} - (C_{,0} - D_{,0})(C_{,3} - A_{,3})/2 \quad (35)$$

$$C_{,01} = h_{01} - (C_{,0} - B_{,0})(C_{,1} - A_{,1})/2 \quad (36)$$

$$D_{,01} = h_{01} - (D_{,0} - B_{,0})(D_{,1} - A_{,1})/2 \quad (37)$$

Полученная система уравнений равносильна системе (2–7), но новые уравнения полностью совместны, дальнейшее исследование совместности невозможно. Заметим, что в найденном виде эти уравнения проинтегрировать невозможно, мешают неизвестные функции $h_{ij}$. Если бы удалось доказать $h_{ij} = 0$, то уравнения можно было бы легко проинтегрировать.

# 2 Поиск решений при $h_{ij} \neq 0$

## 2.1 Получение важного следствия

Система уравнений, полученная в настоящем разделе, неравносильна системе (2–7), а является лишь ее следствием, однако, эти новые уравнения можно интегрировать и строить классификацию решений.

Рассмотрим любое из полученных уравнений, например, (36) — выбор именно этого уравнения произволен и был сделан автором из соображений, не связанных с содержнием статьи. Продифференцируем это уравнение по $x^2$

$$A_{,12}(C_{,0} - B_{,0}) + B_{,02}(C_{,1} - A_{,1}) = 0 \tag{38}$$

В результате подстановки в (38) вторых производных из (30),(32), получим

$$h_{12}(C_{,0} - B_{,0}) + h_{02}(C_{,1} - A_{,1}) = 0 \tag{39}$$

Составим разность

$$A_{,12}h_{02} - B_{,02}h_{12}$$

и, используя (30),(32) и (39), убедимся, что эта разность равна нулю. Рассуждая аналогично, найдем все 8 подобных соотношений. Они объединены в системы для удобства

$$A_{,12}h_{02} - B_{,02}h_{12} = 0 \tag{40}$$
$$A_{,12}h_{01} - C_{,01}h_{12} = 0 \tag{41}$$

$$A_{,23}h_{03} - C_{,03}h_{23} = 0 \tag{42}$$
$$A_{,23}h_{02} - D_{,02}h_{23} = 0 \tag{43}$$

$$A_{,13}h_{03} - B_{,03}h_{13} = 0 \tag{44}$$
$$A_{,13}h_{01} - D_{,01}h_{13} = 0 \tag{45}$$

$$B_{,23}h_{13} - C_{,13}h_{23} = 0 \tag{46}$$
$$B_{,23}h_{12} - D_{,12}h_{23} = 0 \tag{47}$$

## 2.2 Разделение переменных в (40–47)

Предположим

$$h_{ij} \neq 0 \tag{48}$$

для всех функций $h_{ij}$, тогда уравнения (40–47) допускают разделение переменных в следующем виде

$$\frac{A_{,12}}{h_{12}} = \frac{B_{,02}}{h_{02}} = \frac{C_{,01}}{h_{01}} = f_3, \tag{49}$$

$$\frac{A_{,23}}{h_{23}} = \frac{D_{,02}}{h_{02}} = \frac{C_{,03}}{h_{03}} = f_1, \tag{50}$$

$$\frac{A_{,13}}{h_{13}} = \frac{B_{,03}}{h_{03}} = \frac{D_{,01}}{h_{01}} = f_2, \tag{51}$$

$$\frac{D_{,12}}{h_{12}} = \frac{B_{,23}}{h_{23}} = \frac{C_{,13}}{h_{13}} = f_0, \tag{52}$$

отсюда следует

$$A_{,12} = f_3h_{12}, \qquad A_{,13} = f_2h_{13}, \qquad A_{,23} = f_1h_{23} \tag{53}$$

$$B_{,02} = f_3 h_{02}, \qquad B_{,03} = f_2 h_{03}, \qquad B_{,23} = f_0 h_{23} \tag{54}$$

$$C_{,01} = f_3 h_{01}, \qquad C_{,03} = f_1 h_{03}, \qquad C_{,13} = f_0 h_{13} \tag{55}$$

$$D_{,01} = f_2 h_{01}, \qquad D_{,02} = f_1 h_{02}, \qquad D_{,12} = f_0 h_{12} \tag{56}$$

Уравнения совместности на соотношения (53–56) суть следующие

$$f_3{}' h_{12} = f_1{}' h_{23} = f_2{}' h_{13} \tag{57}$$

$$f_3{}' h_{02} = f_2{}' h_{03} = f_0{}' h_{23} \tag{58}$$

$$f_3{}' h_{01} = f_1{}' h_{03} = f_0{}' h_{13} \tag{59}$$

$$f_1{}' h_{02} = f_2{}' h_{01} = f_0{}' h_{12} \tag{60}$$

Из уравнений (57–60) и условия (48) следует, что равенство нулю хотя бы одной функции $f_i{}'$ влечет за собой равенство нулю всех этих функций. Таким образом, нужно рассмотреть два случая

$$f_0{}' f_1{}' f_2{}' f_3{}' \neq 0 \;\text{ и }\; f_0{}' = f_1{}' = f_2{}' = f_3{}' = 0$$

## 2.3 Доказательство отсутствия решения при $f_0{}' f_1{}' f_2{}' f_3{}' \neq 0$

Рассмотрим подробнее одно из уравнений совместности, например, (57). В силу условия (48), в нем также можно разделить переменные в следующем виде

$$\frac{f_3{}'}{h_{23}} = \frac{f_1{}'}{h_{12}} = \frac{1}{a_2}, \qquad \frac{f_3{}'}{h_{13}} = \frac{f_2{}'}{h_{12}} = \frac{1}{a_1}, \qquad \frac{f_1{}'}{h_{13}} = \frac{f_2{}'}{h_{23}} = \frac{1}{a_3} \tag{61}$$

$$\frac{a_1}{f_1{}'} = \frac{a_2}{f_2{}'} = \frac{a_3}{f_3{}'} = \alpha \tag{62}$$

$$h_{12} = \alpha f_1{}' f_2{}', \qquad h_{13} = \alpha f_1{}' f_3{}', \qquad h_{23} = \alpha f_2{}' f_3{}' \tag{63}$$

Окончательно,

$$A_{,12} = \alpha f_1{}' f_2{}' f_3, \qquad A_{,13} = \alpha f_1{}' f_2 f_3', \qquad A_{,23} = \alpha f_1 f_2{}' f_3', \tag{64}$$

$$B_{,02} = \beta f_0{}' f_2{}' f_3, \qquad B_{,03} = \beta f_0{}' f_2 f_3', \qquad B_{,23} = \beta f_0 f_2{}' f_3', \tag{65}$$

$$C_{,01} = \gamma f_0{}' f_1{}' f_3, \qquad C_{,03} = \gamma f_0{}' f_1 f_3', \qquad C_{,13} = \gamma f_0 f_1{}' f_3', \tag{66}$$

$$D_{,01} = \delta f_0{}' f_1{}' f_2, \qquad D_{,02} = \delta f_0{}' f_1 f_2', \qquad D_{,12} = \delta f_0 f_1{}' f_2'. \tag{67}$$

В результате интегрирования получим

$$A = f_1 f_2 f_3 + a_1 + a_2 + a_3 \tag{68}$$

$$B = f_0 f_2 f_3 + b_0 + b_2 + b_3 \tag{69}$$

$$C = f_0 f_1 f_3 + c_0 + c_1 + c_3 \tag{70}$$

$$D = f_0 f_1 f_2 + d_0 + d_1 + d_2 \tag{71}$$

Константы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ равны из требования алгебраической совместности и могут быть приняты равными 1. Однако, подстановка в (26–37) приводит к противоречию. Например, подставляя (68) в (26) и дважды дифференцируя по $x^0$, получаем

$$f_0{}' f_1 f_3 = 0,$$

что противоречит предположению.

## 2.4 Доказательство отсутствия решения при $f_0' = f_1' = f_2' = f_3' = 0$

$f_i$ - константы, обозначим их следующим образом

$$f_0 = \alpha, \qquad f_1 = \beta, \qquad f_2 = \gamma, \qquad f_3 = \delta \tag{72}$$

Из уравнений (49–52) следует равенство нулю третьих смешанных производных от функций $A, B, C, D$, значит,

$$A = a_{12} + a_{13} + a_{23}, \qquad B = b_{02} + b_{03} + b_{23}, \qquad C = c_{01} + c_{03} + c_{13}, \qquad D = d_{01} + d_{02} + d_{12} \tag{73}$$

Уравнение (26) принимает вид

$$a_{23,23} - h_{23} = -\frac{1}{2}(a_{13,3} + a_{23,3} - c_{03,3} - c_{13,3})(a_{12,2} + a_{23,2} - d_{02,2} - d_{12,2}) \tag{74}$$

Разделяя переменные в нем, получаем следующее

$$a_{13,3} + a_{23,3} - c_{03,3} - c_{13,3} = m_{23} \quad \rightarrow \quad a_{13,13} = 0.$$

При $\delta \neq 0$ это означает, что $h_{13} = 0$, что запрещено предположением. При $\delta = 0$ (или в случае равенства других, даже всех констант) противоречие получается также при разделении переменных и следующим из этого равенством функций $h_{ij}$ нулю.

Таким образом, решений при $h_{ij} \neq 0$ нет.